

Нижегородский Государственный Технический Университет
Заочно-Вечерний Факультет (Заочное отделение)

Контрольная работа по высшей математике №01

Вариант №01

Задача 1.

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Решить систему: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления с использованием обратной матрицы; 3) методом определителей.

Решение:

1. Решение методом Гаусса:

Прямой ход Гаусса:

Запишем расширенную матрицу системы:

$$(A|B)_{3 \times 4} = \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{[2]-3[1]} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{[3]-2[1]} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \sim \\ \{2\} \leftrightarrow \{3\} \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \sim \\ \frac{1}{3}[2] \\ -\frac{1}{11}[3] \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \sim \\ \frac{1}{3}[2] \\ -\frac{1}{11}[3] \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Обратный ход Гаусса:

По полученной эквивалентной расширенной матрице составляем систему уравнений, которая принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 + 1 = 4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Решение средствами матричного исчисления с использованием обратной матрицы:

В матричной форме уравнение записывается так:

$$A_{3 \times 3} X_{3 \times 1} = B_{3 \times 1}, \text{ где } A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}; X_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$X_{3 \times 1} = A_{3 \times 3}^{-1} B_{3 \times 1},$$

$$\text{где } A_{3 \times 3}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{здесь } A_{3 \times 3}^{-1} - \text{обратная}$$

матрица, A_{ij} – адъюнкт (алгебраическое дополнение) элементов a_{ij} матрицы $A_{3 \times 3}$).

Найдем определитель матрицы $A_{3 \times 3}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -11 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 33.$$

Найдем адъюнкты элементов a_{ij} матрицы $A_{3 \times 3}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11.$$

Запишем обратную матрицу:

$$A_{3 \times 3}^{-1} = \frac{1}{33} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Найдем значения x :

$$X_{3 \times 1} = A_{3 \times 3}^{-1} B_{3 \times 1} = \frac{1}{33} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \cdot \begin{pmatrix} -64 + 9 + 88 \\ 36 - 3 + 0 \\ 124 - 3 - 88 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решение методом определителей (правило Крамера):

Найдем определитель системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -11 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 33.$$

Найдем определитель Δx_1 :

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -11 & -11 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 12 & 9 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -11 & -11 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = 33;$$

Найдем определитель Δx_2 :

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -11 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 33;$$

Найдем определитель Δx_3 :

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 33.$$

Найдем значения x :

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1;$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $X_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$